#### Лекция № 4

###### Линейное программирование

###### Задачи линейного программирования

Задачи оптимизации решений, для которых:

* + - * показатель эффективности Е представляет собой *линейную функцию* от х1, х2, …;
      * ограничения на возможные решения имеют вид *линейных равенств или неравенств*, называются задачами *линейного программирования* (*планирования*).

Рассмотрим некоторые из таких задач

1. **Задача о пищевом рационе**. Имеется:

П1, П2, П3, П4 – четыре вида продуктов питания; С1, С2, С3, С4 – стоимость единицы продукта.

Из этих продуктов необходимо составить пищевой рацион, который должен содержать:

* + белков не менее в1 единиц;
  + углеводов не менее в2 единиц; (1.1)
  + жиров не мене в3 единиц.

Содержание элементов в единице каждого продукта:

Таблица 1.1.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | Элемент | | |
| Белки | Углеводы | Жиры |
| Продукт | П1 | а11 | а12 | а13 |
| П2 | а21 | а22 | а23 |
| П3 | а31 | а32 | а33 |
| П4 | а41 | а42 | а43 |

Требуется составить пищевой рацион с обеспечением условий (1.1) при минимальной стоимости.

Пусть х1, х2, х3, х4 – количества продуктов П1, П2, П3, П4, входящие в рацион.

Очевидно,

Е= С1х1+ С2х2+ С3х3+ С4х4 – стоимость рациона

4

или

*E*  *ci xi*

*i*1

(1.2)

условия (1.1) математически запишутся

*a*11 *x*1  *a*21 *x*2  *a*31 *x*3  *a*41 *x*4  *b*1 

Ограничения:

*a x*  *a x*  *a*

1.  *a x*  *b* 

(1.3)

12 1 22 2

*a x*  *a x*

32 3 42 4

* *a x*  *a x*

2 

 *b* 

Формулировка задачи:

13 1

23 2

33 3

43 4 3 

Выбрать такие неотрицательные значения переменных х1, х2, х3, х4, удовлетворяющих ограничениям (1.3), при которых линейная функция (1.2) обращалась бы в минимум.

1. **Задача о загрузке станков** Фабрика имеет станков типа 1 – *N*1 шт. Фабрика имеет станков типа 2 – *N*2 шт.

Станки могут производить четыре вида тканей:

Т1, Т2, Т3, Т4.

Производительность станков в месяц по видам тканей (одного станка)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Вид ткани | | | |
| Т1 | Т2 | Т3 | Т4 |
| 1 | а11 | а12 | а13 | а14 |
| 2 | а21 | а22 | а23 | а24 |

Доход фабрики от 1-м ткани:

*T*1  *c*1; *T*2  *c*2 ; *T*3  *c*3 ; *T*4  *c*4 .

Предписанный фабрике план за месяц:

*T*1  *b*1; *T*2  *b*2 ; *T*3  *b*3; *T*4  *b*4.

Требуется: так распределить загрузку станков по различным видам тканей, чтобы план был выполнен и месячная прибыль была максимальна.

Запишем условия задачи математически: Элементы решения

Обозначим:

*x*11 – число станков типа 1, занятых производством ткани Т1;

*x*12 - число станков типа 1, занятых производством ткани Т2;

Вообще

*j=1,2,3,4).*

…………………………..

*x*24 - число станков типа 2, занятых производством ткани Т4;

*xij* - число станков типа *i,* занятых производством ткани *Tj (i=1,2;*

Таким образом, возникают 8 элементов решения:

*x*11 , *x*12 , *x*13 , *x*14

 , (1.4)

*x*21

, *x*22

, *x*23



, *x*24 

которые необходимо выбрать так, чтобы прибыль была максимальна.

*E*  *C* *x*

* + *x*   *C* *x*
  + *x*   *C* *x*
  + *x*   *C* *x*

 *x* 

(1.5)

Ограничения:

1 11 21

2 12 22

3 13 23

4 14 24

По наличному запасу станков:

*x*11  *x*12  *x*13  *x*14  *N*1 



(1.6)

По ассортименту:

*x*21

 *x*22

 *x*23

 *x*24

 *N*2 

*a*11 *x*11  *a*21 *x*21  *b*1 

*a x*  *a x*  *b* 

12 12

*a x*

22 22

 *a x*

2 

 *b* 

(1.7)

13 13 23 23 3 

*a*14 *x*14  *a*24 *x*24  *b*4 

Задача формулируется так:

Выбрать такие неотрицательные значения

*xij* , *i=1,2; j=1,2,3,4,*

удовлетворяющие линейным неравенствам (1.6) и (1.7), при которых линейная функция (1.5) обращалась бы в максимум.

###### Задача о распределении ресурсов.

*R*1, *R*2,…, *Rm* – ресурсы (сырьё, оборудование, рабочая сила).

*b*1, *b*2,…, *bm* – количество ресурсов (единиц).

*T*1, *T*2,…, *Tn* – ассортимент товаров, которые можно производить этими ресурсами.

Для производства 1 единицы товара *Tj* необходимо *aij* единиц ресурса *Ri* (*i*=1,2,…,m). Каждая единица ресурса *Ri* стоит *di* (*i*=1,2,…,m). Каждая единица товара Tj может быть реализована по цене *cj* ( *j*  1, *n* ).

По каждому виду товара *Tj* количество произведенных единиц

ограничивается спросом: *Tj*

 *k j*

*j* 1, *n*.

Спрашивается: какое количество и какого товара необходимо произвести для того, чтобы реализовать максимальную прибыль?

Условия задачи математически:

Пусть *х*1, *х*2, …, *хn* – количества товаров *T*1, *T*2,…, *Tn*, запланированных к производству.

Ограничения:

По производству:

По ресурсам:

*x*1  *k*1 , *x*2  *k*2 ,..., *xn*  *kn* .

(1.8)

Äëÿ âñåõ *Tj*  *R*1  *a*11*x*1  *a*12 *x*2  ...  *a*1*n xn*  *b*1 



Äëÿ âñåõ *Tj*  *R*2  *a*21*x*1  *a*22 *x*2  ...  *a*2*n xn*  *b*2 

(1.9)

....................... 



Äëÿ âñåõ *T*  *R*  *a x*  *a x*  ...  *a x*  *b* 

*j*

Или сокращённо:

*m*

*n*

### 

*j* 1

### 

*n*

*m*1 1

*a*1 *j x j*

*a x*

*m* 2 2

 *b*1 





 *b* 

*mn n m* 

2 *j j* 2 

*j* 1 

(1.9)

.......... 



*n*

 *a x*  *b* 

*mj j*

*j* 1

*m* 

Найдём выражение целевой функции *Е* – прибыли через *х*1, *х*2, …, *хn*.

Себестоимость *Sj* единицы товара Tj равна:

Короче

*S j*  *a*1 *j d*1  *a*2 *j d*2  ...  *amj dm* ,

*m*

(1.10)

*S j*  *aij di* , *j*  1,2,...,*n*.

*i*1

(1.10’)

Вычислив по (1.10) все себестоимости, получим для

*S*1, *S*2, …, *Sn*

Чистая прибыль от продажи единицы товара Tj равна

*q j*  *c j*  *s j* (*j*=1,2,…,*n*) (1.11)

По (1.11) получим ряд

Общая чистая прибыль Е:

*q*1, *q*2, …, *qn*

*n*

E  q1 *x*1  q2 *x*2  ...  qn *xn* ;

Задача сводится к следующему:

*E*   *q j x j j* 1

(1.12)

Выбрать такие неотрицательные значения *х*1, *х*2,…, *хn*, которые удовлетворяют линейным неравенствам (1.8) и (1.9) и обращают в максимум линейную функцию Е (1.12) этих переменных.

###### Задача о перевозках:

Имеется *m* складов

*Ñ*1 , *Ñ*2 ,...,*Ñ*m ,

*a*1 , *a*2 ,..., *a*m 

- количества единиц товара в складах (товара одной номенклатуры, например, угля).

Имеется *n* пунктов потребления

*Ï* 1 , *Ï* 2 ,..., *Ï n* ,

*b*1 , *b*2 ,...,*bn* 

- заявки пунктов потребления (в единицах товара).

Речь идет о составлении плана перевозок со складов

*Ñ*1 , *Ñ*2 ,...,*Ñm* в

пункты

*Ï* 1 , *Ï*

2 ,..., *Ï*

*n* товара.

Заявки выполнимы, т.е.

*n m*

*bj*  *ai* .

*j* 1 *i*1

Склады связаны с потребителями какой-то сетью дорог с определенными тарифами на перевозки. Так, стоимость перевозки единицы

товара из *Сi* в *Пj* равна

*cij* (*i*  1, *m*; *j*  1, *n*) .

Требуется составить план перевозок, т.е. указать, с какого склада в какие пункты и какое количество товара нужно направлять, чтобы заявки были выполнены, а общие расходы на перевозки были минимальны.

Пусть

*xij* - количество единиц товара, направляемого из *Сi* в *Пj* (может

быть

*xij*

 0 ). Элементы решения (план перевозок) образуют прямоугольную

матрицу чисел:

или сокращенно

(*xij* ), *i* 1,*m*,

*x*11*, x*12 *,...,x*1*n*

*x*21*, x*22 *,...,x*2 *n*

*.....*

*xm*1 *, xm* 2 *,...,xmn*

*j* 1,*n*.

Требуется выбрать такие следующие условия:

*xij*  0, *i* 1, *m*, *j* 1,*n*,

чтобы были выполнены

1. Ёмкость складов не должна быть превышена, т.е. количество товара,

взятого с каждого склада, не должно превышать имеющихся в нем запасов:

x11  *x*12  ...  *x*1*n*  *a*1 ; 



x 21

 *x*22

 ...  *x*2 *n*

 *a*2 ; 

.......... 



или короче

xm1

* *xm* 2

 ...  *xmn*

 *am*

,

 *x*  *a* , 

n

j1

n

## 

j1

1 *j*

*x*2 *j*

1 





,

 *a*2 



(1.13)

.......... 



n

## 

j1

*xmj*

 *am* .





1. Заявки потребителей должны быть выполнены:

*x*11  *x*21  *...* *xm*1  *b*1*, x*12  *x*22  *...* *xm*2  *b*2*;*

*..........*

*x*1*n*  *x*2*n*  *...* *xmn*  *bn,*

или короче

 x  *b* , 

m



i1 1

i1



m

 xi2  *b*2 ,

(1.14)

i1 

.......... 



m

Общая стоимость перевозок



i1

xin

 *b* .

*n* 



или короче

E  *C*11 *x*11  *C*12 *x*12  ...  *C*1*n x*1*n* 

 *C*21 *x*21  *C*22 *x*22  ...  *C*2 *n x*2 *n* 

.............

* *Cm*1 *xm*1  *Cm* 2 *xm* 2  ...  *Cmn xmn* ,

*m n*

*E*  *Cij xij*

(1.15)

*i*1 *j* 1

Требуется так выбрать план перевозок *x*

*ij*

, *i* 1,*m*, *j* 1, *n*,

чтобы Е из

(1.15) обратить в минимум при выполнении условий (1.13) и (1.14).

Особенность: Здесь имеются ограничения в виде линейных равенств (1.14).

В дальнейшем будут встречаться ограничения и в виде равенств и в виде неравенств. Есть простые способы взаимного перехода.

Если условие задачи таково, что

*n m*

*bj*   *ai* ,

*j*1 *i*1

то с каждого склада будет вывезено всё и неравенства (1.13) обратятся также в равенства.

Приведённая выше задача называется *транспортной задачей*.

###### Задача о производстве сложного оборудования

Планируется выпуск сложного оборудования, каждый комплект которого состоит из *n* элементов:

Э1, Э2, …, Э*n*.

Заказы на производство этих элементов могут быть размещены на *m*

разных предприятиях:

П1, П2, …, П*m*.

За заданное время Т на П*i* можно изготовить

*aij*

элементов Э*j*

(*i*  1, *m*; *j*  1, *n*) . Сдаче подлежат полные комплекты оборудования, состоящие из набора всех элементов Э1, Э2, …, Э*n*.

Требуется распределить заказы по предприятиям так, чтобы число

полных комплектов, изготовленных за время Т, было максимально. Планируя производство, мы должны для каждого Пi указать, какую часть имеющегося в его распоряжении времени оно должно отдать на производство элементов Э*j* (*i*  1, *m*; *j*  1, *n*) .

Обозначим

*xij*

долю времени Т, которую П*i* будет уделять выпуску

элемента Э*j* (может быть

*xij*  0 ).

Ограничения: количество времени, которое каждое предприятие затрачивает на производство всех элементов не должно превышать *Т* (а

«доля» - единицы):

*x*11  *x*12  *...* *x*1*n*  1; 



*x*21

 *x*22

 ...  *x*2*n*

 1; 

.......... 



или

*xm*1  *xm*2  ...  *xmn*  1,

n



j1

n

### 

j1

x1j

x 2j

 1, 





 1, 



(1.16)

.......... 



n

### 

j1

xmj

 1.



Определим количество полных комплектов оборудования, которое за время *T* поставят все предприятия вместе.

Общее количество элемента Э*j*, которое поставят все предприятия вместе равно

Nj  *a*1 *j x*1 *j*

* *a*2 *j x*2 *j*  ...  *amj xmj* , или

*m*

*N j*  *aij xij*

*i*1

( *j*  1, *n*)

(1.17)

Таким образом, при заданном плане распределения заказов, т.е. при заданных

*xij*

 *i* 1,*m*, *j* 1,*n* будет произведено:

* N1
* N 2

…

* N n

экз. элемента Э*1* экз. элемента Э*2*

экз. элемента Э*n*

Из этих элементов можно собрать столько полных комплектов, каково

минимальное из всех чисел N1 , N 2 ,..., Nn .

Действительно, если Э1=100 шт., Э2=10 шт., то мы никак не можем собрать из этих элементов более 10 полных комплектов.

Обозначим Z-количество полных комплектов, которые можно собрать при данном плане размещения заказов ( *xij* ).

Имеем:

Z  min *N*

*j*

j

С учетом (1.17), условие (1.18) переписывается

m

Z  min  *aij xij*

(1.18)

(1.19)

j *i*1

Таким образом, мы пришли к следующей математической постановке задачи:

Найти такие значения переменных

*xij*  0 , чтобы выполнялись

неравенства (1.16) и при этом обращалась в максимум функция этих переменных (1.19).

Особенность (отличие) от прежних задач:

Функция *Z* не является линейной функцией от

*xij*

и, следовательно,

рассматриваемая задача не является задачей линейного программирования. Однако её легко можно свести к задаче линейного программирования.

Т.к. *Z* является минимальной из всех величин написать ряд неравенств:

*m*

Nj  *aij xij* , то можно

*i*1

*m*

# 

*i*1

*m*

*ai*1 *xi*1 *a x*

 *Z* ; 





 *Z* ;

# 

*i*1

...

*m*

# 

*i*1

*i* 2

*ain*

*i* 2

*xin*









 *Z* ; 



(1.20)

Величину *Z* можно рассматривать как новую неотрицательную переменную и

решить следующую задачу:

Найти такие неотрицательные значения

*x*11*,x*12*,...,xmn*

и *Z,* чтобы они

удовлетворяли линейным неравенствам (1.16) и (1.20) и при этом величина *Z*

обращалась в максимум.

Т.к. величина *Z* есть линейная функция от новых переменных

*x*11*,x*12*,...,xmn* , *Z:*

*Z*  0 *x*11  0 *x*12  *...* 0 *xmn* 1 *Z* , то задача сведена к

обычной задаче линейного программирования путем введения «лишней» переменной *Z*.

Задачи такого типа, где требуется обратить в максимум линейное значение какой-то величины (или в min максимальное) называются

«задачами на минимакс».

Итак, мы рассмотрели несколько задач исследования операций, для решения которых применяется математический аппарат линейного программирования. Но нужен ли такой аппарат?

Нужен, ибо дифференцированием Е по аргументам, приравниванием к нулю производных и решением полученной системы здесь нельзя воспользоваться, т.к. функция Е-линейна, производные от неё по всем аргументам постоянны и нигде в нуль не обращаются.

Максимум (или минимум) Е, если он существует, достигается всегда

где-то на границе области возможных значений

x1 , x 2 ,..., т.е. там, *где*

*начинают действовать ограничения*. Математический аппарат линейного программирования и позволяет нам последовательно, в кратчайшие сроки,

обследовать границы области возможных решений и найти на этих границах то решение, которое является оптимальным.

###### Контрольные вопросы

1. Какие задачи оптимизации решений в ИСО относятся к классу задач линейного программирования?
2. Что означает термин «аддитивность переменных» при изучении свойства линейности функций в задачах линейного программирования?
3. Приведите математическую постановку задачи о распределении ресурсов.
4. Приведите математическую постановку минимаксной задачи ЛП (на примере задачи о производстве сложного оборудования).